Proba teoretică – seniori

I.A. (7 puncte) Ce durează mai mult: cea mai lungă zi sau perioada dintre răsăritul şi apusul Lunii?

Rezolvare: Intervalul de timp dintre răsăritul şi apusul Lunii. Aceasta se explică atât ptin faptul că Luna se mişcă pe orbită în sens invers mişcării diurne, cât şi prin faptul că Luna, de regulă, are declinație mai mare decât Soarele, întrucât orbita sa este înclinată față de ecliptică.

B. (8 puncte) La 16 iulie 2000 s-a produs o eclipsă totală de Lună, în care Luna, aflată aproape de apogeul orbitei sale, a trecut, practic, prin centrul orbitei terestre. Va fi aproape de maximul teoretic valoarea fazei maxime a eclipsei? Dar valoarea duratei fazei de totalitate?

Rezolvare: Pe măsura îndepărtării de Pământ, diametrul umbrei planetei noastre scade şi, în mod corespunzător, scade şi raportul dintre acest diametru şi diametrul Lunii. De aceea, cea mai mare fază va corespunde acelor eclipse centrale pentru care satelitul nostru este mai aproape de perigeul său, şi nu de apogeul orbitei, ceea ce înseamnă că faza eclipsei din 16 iulie 2000 a fost mai mică decât cea maximală. Durata fazei maxime (1h 47 min), în schimb, se atinge atunci când Luna se apropie de apogeu, pentru că la apogeu viteza de mişcare a Lunii este cu aproape 15% mai mică decât la perigee, iar dimensiunea spațială a umbrei – cu 5% mai mică.

C. (10 puncte) În anul 2088 vor fi cinci duminici în luna februarie. În ce an se va întâmpla pentru prima dată după 2088 să fie cinci duminici în februarie? În ce an s-a întâmplat ultima dată înainte de 2088 să fie cinci duminici în februarie?

Rezolvare: Anul 2088 este un an bisect, deci luna februarie are 29 de zile. Dacă au fost cinci duminici înseamnă că 1 februarie a fost într-o zi de duminică. Un an bisect are 366 de zile, adică 52 de săptămâni şi două zile. Asta înseamnă că dacă în 2088, 1 februarie va fi într-o duminică, în 2089, 1 februarie va fi într-o zi de marți. În 2090, după un an obişnuit, adică 365 zile, 52 de săptămâni şi o zi, 1 februarie va fi într-o zi de miercuri. Folosind acest raționament şi ținând seama că 2100 nu este an bisect (ani de la sfârşitul unui secol sunt bisecți doar dacă se divid cu 400) ajungem la concluzia că primul an bisect în care luna februarie începe într-o duminică este 2128.
Pentru a afla când s-a întâmplat pentru ultima dată acest lucru folosim un raționament similar cu cel de mai sus, atâta doar că atunci când se mergem în trecut între 1 februarie dintr-un an bisect şi anul dinaintea lui trec 365 de zile, deci 1 februarie 2087 a fost într-o sâmbătă, dar între 1 februarie dintr-un an dinaintea unuia bisect şi un an bisect trec 366 zile. Astfel între 1 februarie 2085 şi 1 februarie 2084 trec 366 de zile. Anul căutat este 2060.

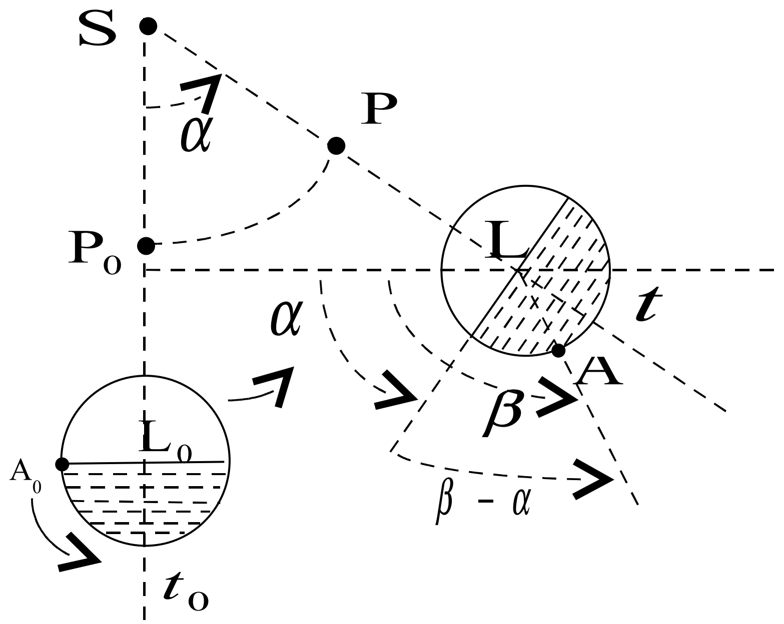
II.A. (10 puncte) Pentru un observator de pe suprafața Lunii, atât Pământul, cât şi Soarele se pot considera puncte materiale, permanent colineare cu centrul Lunii. Datorită rotației proprii a Lunii, pe suprafața acesteia există alternanța zi – noapte. *Să se* *determine*, pentru observatorul de pe suprafața Lunii, durata nopții lunare, cunoscând perioada rotației proprii a Lunii, $T_L = 27{,}25$ zile terestre şi perioada rotației Pământului în jurul Soarelui, $T_{PS} = 365$ zile terestre.

Rezolvare

Datorită rotației proprii, Luna îşi expune treptat spre Soare întreaga suprafață, astfel încât pentru un observator de pe suprafața Lunii există alternanța zi – noapte, cu o durată diferită de aceea a alternanței zi – noapte de pe Pământ.

În figura alăturată este reprezentat sistemul Soare – Pământ – Lună, la momentele t_0 şi respectiv *t*, atunci când, pentru observatorul aflat în repaus pe suprafața Lunii, începe noaptea lunară (poziția A_0) şi la un moment oarecare din noapte (poziția A). Sunt evidențiate pozițiile Lunii în raport cu Soarele la cele două momente considerate.

În intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$ direcția Soare – Pământ – Lună s-a rotit cu unghiul $\alpha = \omega_{PS}\Delta t$, unde ω_{PS} este viteza unghiulară a Pământului în mişcarea sa circulară efectuată în jurul Soarelui, iar raza vectoare a observatorului, în raport cu centrul Lunii, s-a rotit cu unghiul $\beta = \omega_L \Delta t$, unde ω_L este viteza unghiulară a rotației proprii a Lunii. Evident şi unghiul cu care s-a rotit linia de separare dintre cele două zone (luminată şi respectiv întunecată) de pe suprafața Lunii, în acelaşi interval de timp, Δt, este α.



Observatorul va ieşi din noaptea lunară, atunci când $\beta - \alpha = \pi$. În aceste condiții, rezultă:

$$\omega_L \Delta t_{nL} - \omega_{PS} \Delta t_{nL} = \pi ;$$

$$\Delta t_{nL} = \frac{\pi}{\omega_L - \omega_{PS}} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T_L} - \frac{2\pi}{T_{PS}}} = \frac{T_L T_{PS}}{2(T_{PS} - T_L)} = 14{,}72 \text{ zile terestre.}$$

B. (10 puncte) Pilotul unei nave cosmice (considerată punct material), observă un asteriod sferic cu raza *R*, atunci când, în zbor cu viteza v_0 pe direcția centrului asteriodului, distanța dintre navă şi suprafața asteroidului este *L*. Imediat cosmonautul acționează, pentru un timp extrem de scurt (neglijabil), unul din motoarele cu reacție, existent pe una din părțile laterale ale navei, care realizează o variație $\Delta \vec{v}$ a vitezei navei, al cărei modul, Δv, este limitat de puterea motorului. *Să se stabilească* orientarea optimă ce trebuie să i se asigure vectorului $\Delta \vec{v}$ şi să se determine Δv astfel încât, realizându-se această orientare optimă, să poată fi evitată coliziunea navei cu asteroidul. Viteza asteroidului este neglijabilă față de viteza navei.

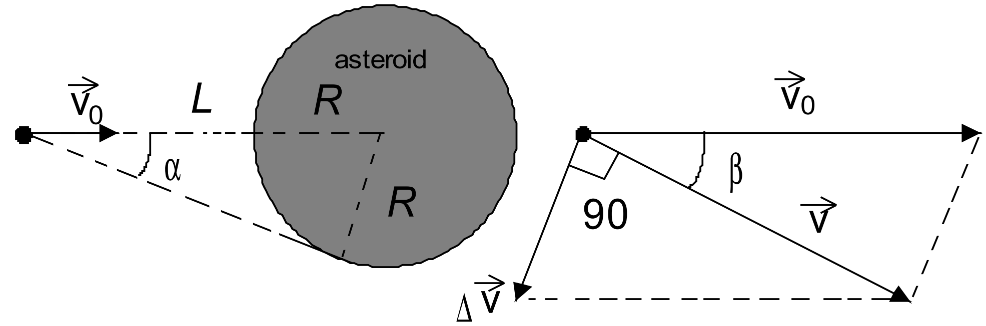
Rezolvare

Pentru evitarea coliziunii trebuie ca orientarea vectorului viteză al navei să fie schimbată, astfel încât unghiul dintre noua sa direcție şi direcția sa inițială să fie superior unghiului α notat în figura alăturată, pentru care avem:

$$\sin\alpha = \frac{R}{L + R}.$$

Orientarea optimă a corecției $\Delta \vec{v}$, la o valoare dată a lui Δv, este aceea care face ca direcția vectorului viteză finală, $\vec{v}$, să fie maxim deviată față de direcția vectorului viteză inițială, $\vec{v}_0$. Aceasta se întâmplă atunci când direcția corecției $\Delta \vec{v}$ este perpendiculară pe direcția vitezei finale, $\vec{v}$, aşa cum indică figura alăturată, din care rezultă:

$$\sin\beta = \frac{\Delta v}{v_0}.$$



Pentru evitarea coliziunii este necesar să avem:

$$\sin\beta > \sin\alpha\,;\ \frac{\Delta v}{v_0} > \frac{R}{R+L};$$

$$\Delta v > \frac{R v_0}{R+L}.$$

III A. (8 puncte) Pentru două stele A şi B maximul de intensitate a radiației lor s-a găsit la lungimile de undă de 6500 Angströmi, respectiv 4000 Angströmi. Ştiind că raza stelei A este de două ori raza stelei B găsiți diferența dintre magnitudinile lor absolute.

Rezolvare: Pentru a afla diferența dintre magnitudinile absolute ale stelelor folosim relația lui Pogson $M_A - M_B = -2{,}5 \cdot lg(L_a / L_B)$. Raportul luminozității stelelor se găseşte din relația dintre luminozitatea, raza şi temperatura lor: $L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$, unde σ este constanta lui Stefan. Temperatura efectiva a stelelor se află din legea lui Wien (produsul dintre lungimea de undă la care se atinge maximul de radiație al stelei şi temperature efectivă a ei este constant), adică raportul temperaturilor stelelor este inversul lungimilor de undă ale stelelor. Ştiind că raza stelei A este de două ori raza stelei B, raportul luminozității stelelor devine $L_A / L_B = 2^2 \cdot (8/13)^4$. Înlocuind obținem diferența magnitudinilor $0{,}6^m$.

B. (10 puncte) Distanța dintre Jupiter şi Soare este de 5,2 u.a. şi magnitudinea sa aparentă la opoziție este de $-2{,}3^m$. Calculați care este magnitudinea aparentă a lui Jupiter atunci când acesta se află la separare maximă de Soare pentru un observator aflat pe steaua α Centauri, care are paralaxa egală cu 0.758".

Rezolvare: Pentru a afla magnitudinea aparentă a lui Jupiter privit de un observator aflat pe steaua α Centauri folosim formula lui Pogson $m_1 - m_2 = -2{,}5 \cdot lg(s_1 / s_2)$, unde m_1 este magnitudinea căutată, iar m_2 este magnitudinea dată. Strălucirea s_2 se află împărțind luminozitatea lui Jupiter la $4\pi d^2$, unde d este distanța dintre Pământ-Jupiter, când Jupiter este la opoziție, adică 4.2 unități astronomice. Aceeaşi formulă se foloseşte şi pentru s_1 . Distanța la care se află observatorul de pe α Centauri se află folosind paralaxa stelei: sin P=1u.a./d, unde P este paralaxa stelei, iar d este distanța Pământ-stea. Pentru unghiuri mici, sinusul unghiului se aproximează cu unghiul exprimat în radiani (P"=P(radiani)/206265). Astfel, raportul strălucirilor lui Jupiter devine egal cu pătratul inversului raportului distanțelor. Înlocuind în formula lui Pogson găsim $m_1 = +21{,}757^m$.

C. (7 puncte) Galaxia noastră are o rază de 30 kpc şi o grosime de 600 pc. Dacă în galaxia noastră se produc cinci explozii de supernovă la fiecare 100 de ani, cât de des ne putem aştepta să se producă o explozie într-o vecinătate de o rază 100 de parseci a Soarelui? Se consideră că stelele sunt uniform distribuite în galaxie.

Rezolvare: Remarcăm, mai întâi, că, întrucât Soarele se află aproape de planul galactic, o sferă cu raza de 100 de parseci, cu centrul în Soare, se află în întregime inclusă în galaxie. Conform datelor problemei, rata exploziilor de supernovă în galaxia noastră este de 0.05 explozii/an. Pentru a determina rata exploziilor de supernovă într-o sferă cu raza de 100 de parseci, cu centrul în Soare, înmulțim această cantitate cu raportul dintre volumul acestei sfere (adică $4\pi r^3/3$) cu volumul galaxiei (adică $\pi R^2 d$) şi obținem că rata exploziilor de supernovă în această sferă este de $1{,}27/10^7$, adică avem, cu aproximație, o explozie de supernovă la fiecare 8,1 milioane de ani.